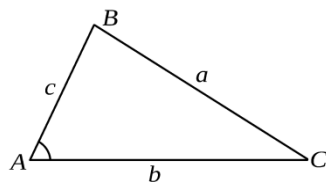


## §1. УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

### Скрещивающиеся прямые

#### ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ?

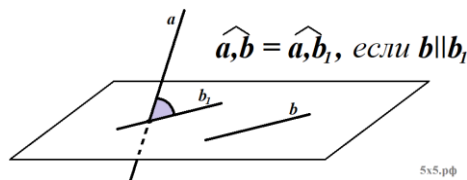


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C;$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$



#### 1.1

Точка  $E$  – середина ребра  $CC_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

а) Докажите, что угол между прямыми  $BE$  и  $AD$  равен углу  $CBE$ .

б) Найдите угол между прямыми  $BE$  и  $AD$ .

Ответ:

#### 1.2

Точка  $M$  – середина ребра  $AB$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

а) Докажите, что угол между прямыми  $B_1M$  и  $CD$  равен углу  $BMB_1$ .

б) Найдите угол между прямыми  $B_1M$  и  $CD$ .

Ответ:

#### 1.3

Точка  $N$  делит ребро  $BC$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  в отношении 1:2, считая от вершины  $B$ .

а) Докажите, что угол между прямыми  $C_1N$  и  $A_1D_1$  равен углу  $B_1C_1N$ .

б) Найдите угол между прямыми  $C_1N$  и  $A_1D_1$ .

Ответ:

#### 1.4

Точка  $F$  делит ребро  $AB$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  в отношении 5:2, считая от вершины  $A$ .

а) Докажите, что угол между прямыми  $B_1F$  и  $CD$  равен углу  $BFB_1$ .

б) Найдите угол между прямыми  $B_1F$  и  $C_1D_1$ .

Ответ:

#### 1.5

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  все рёбра равны 1.

а) Докажите, что прямая  $AB_1$  параллельна прямой, проходящей через середины отрезков  $AC$  и  $BC_1$ .

б) Найдите косинус угла между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$ .

Ответ:

#### 1.6

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  все рёбра равны 4.

а) Докажите, что прямая  $A_1B$  параллельна прямой, проходящей через середины отрезков  $BC$  и  $AC_1$ .

б) Найдите косинус угла между прямыми  $A_1B$  и  $AC_1$ .

Ответ:

#### 1.7

На ребре  $CC_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  отмечена точка  $E$  так, что  $CE:EC_1 = 1:2$ .

а) Пусть точка  $F$  делит ребро  $BB_1$  в отношении 1:2, считая от вершины  $B_1$ . Докажите, что угол между прямыми  $BE$  и  $AC_1$  равен углу  $AC_1F$ .

б) Найдите угол между прямыми  $BE$  и  $AC_1$ .

Ответ:

**1.8**

На ребре  $DD_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  отмечена точка  $E$  так, что  $DE:ED_1 = 1:4$ .

- а) Пусть точка  $N$  делит ребро  $AA_1$  в отношении  $1:4$ , считая от вершины  $A_1$ . Докажите, что угол между прямыми  $ND_1$  и  $AC_1$  равен углу  $EAC_1$ .  
б) Найдите угол между прямыми  $ND_1$  и  $AC_1$ .

Ответ:

**1.9**

В правильном тетраэдре  $ABCD$  проведена высота  $DH$ .  $K$  – середина отрезка  $CH$ .  $BM$  – медиана боковой грани  $BCD$ .

- а) Докажите, что угол между  $DH$  и  $BM$  равен углу  $BMK$ .  
б) Найдите угол между  $DH$  и  $BM$ .

Ответ:

**1.10**

В правильном тетраэдре  $ABCD$  точка  $O$  – центр грани  $ABC$ .  $BK$  – медиана треугольника  $BOC$ , а  $BM$  – медиана треугольника  $BCD$ .

- а) Докажите, что угол между  $DO$  и  $BK$  равен углу  $MKB$ .  
б) Найдите угол между  $DO$  и  $BK$ .

Ответ:

**1.11**

В правильном тетраэдре  $ABCD$  точка  $O$  – центр грани  $ABC$ .  $BK$  – медиана треугольника  $BOC$ , а  $BM$  – медиана треугольника  $BCD$ .

- а) Докажите, что  $DO$  и  $BK$  перпендикулярны.  
б) Найдите угол  $MBK$ .

Ответ:

**1.12**

Длина ребра правильного тетраэдра  $ABCD$  равна 1.  $M$  – середина ребра  $BC$ ,  $L$  – середина ребра  $AB$ .

- а) Докажите, что плоскость, параллельная прямой  $CL$  и содержащая прямую  $DM$ , делит ребро  $AB$  в отношении  $3:1$ , считая от вершины  $A$ .  
б) Найдите угол между прямыми  $DM$  и  $CL$ .

Ответ:

**1.13**

Длина ребра правильного тетраэдра  $ABCD$  равна 2. Точки  $M$  и  $L$  середины рёбер  $AC$  и  $AB$  соответственно.

- а) Докажите, что плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $CL$  и содержащая прямую  $DM$ , делит ребро  $AB$  в отношении  $1:3$ , считая от вершины  $A$ .  
б) Найдите угол между прямыми  $DK$  и  $CL$ , где  $K$  – точка пересечения прямой  $AB$  и плоскости  $\alpha$ .

Ответ:

**1.14**

В правильном тетраэдре  $ABCD$  точка  $H$  – центр грани  $ABC$ , а точка  $M$  – середина ребра  $CD$ .

- а) Докажите, что прямые  $AB$  и  $CD$  перпендикулярны.  
б) Найдите угол между прямыми  $DH$  и  $BM$ .

Ответ:

**1.15**

В правильном тетраэдре  $ABCD$  точка  $H$  – точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ , а точка  $N$  – середина ребра  $BD$ .

- Докажите, что прямые  $AD$  и  $BC$  перпендикулярны.
- Найдите угол между прямыми  $DH$  и  $CN$ .

Ответ:

**1.16**

Боковое ребро правильной треугольной пирамиды  $SABC$  равно 6, а косинус угла  $ASB$  при вершине боковой грани равен  $1/9$ . Точка  $M$  – середина ребра  $SC$ , точка  $N$  – середина ребра  $AC$ .

- Докажите, что угол между прямыми  $BM$  и  $SA$  равен углу  $BMN$ .
- Найдите косинус угла между прямыми  $BM$  и  $SA$ .

Ответ:

**1.17**

Боковое ребро правильной треугольной пирамиды  $SABC$  равно 10, а апофема равна 8. Точка  $E$  – середина ребра  $SA$ , точка  $F$  – середина ребра  $AB$ .

- Докажите, что угол между прямыми  $CE$  и  $SB$  равен углу  $CEF$ .
- Найдите угол между прямыми  $CE$  и  $SB$ .

Ответ:

**1.18**

Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$ .

- Докажите, что угол между прямыми  $SB$  и  $CD$  равен углу  $SBE$ .
- Если стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми  $SB$  и  $CD$ .

Ответ:

**1.19**

Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$ .

- Докажите, что угол между прямыми  $SA$  и  $BC$  равен углу  $SAD$ .
- Если стороны основания равны 1, а боковые ребра равны  $\sqrt{2}$ , найдите угол между прямыми  $SA$  и  $BC$ .

Ответ:

**1.20**

Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$ .

- Докажите, что угол между прямыми  $SA$  и  $CD$  равен углу  $SAF$ .
- Найдите угол между прямыми  $SA$  и  $CD$ , если стороны основания равны 10, а боковые ребра равны 25.

Ответ:

**1.21**

В пирамиде  $DABC$  прямые, содержащие ребра  $DC$  и  $AB$ , перпендикулярны.

- Постройте сечение плоскостью, проходящей через точку  $E$  – середину ребра  $DB$ , и параллельной  $DC$  и  $AB$ . Докажите, что получившееся сечение является прямоугольником.
- Найдите угол между диагоналями этого прямоугольника, если  $DC = 24$ ,  $AB = 10$ .

Ответ:

**1.22**

В пирамиде  $SABC$  прямые, содержащие ребра  $BC$  и  $SA$ , перпендикулярны. Точка  $M$  делит ребро  $SC$  так, что  $MC = 2SM$ .

а) Постройте сечение плоскостью, проходящей через точку  $M$  и параллельной  $BC$  и  $SA$ . Докажите, что получившееся сечение является прямоугольником.

б) Найдите угол между диагоналями этого прямоугольника, если  $SA = \frac{\sqrt{27}}{2}$ ,  $BC = 3$ .

Ответ:

**1.23**

В правильном тетраэдре  $ABCD$  точка  $M$  делит ребро  $AD$  в отношении 1:3.

а) Постройте сечение плоскостью, проходящей через точку  $M$  и параллельной  $AB$  и  $CD$ . Докажите, что получившееся сечение является прямоугольником.

б) Найдите угол между диагоналями этого прямоугольника.

Ответ:

**1.24**

В правильной четырехугольной пирамиде  $PABCD$  проведена высота  $PH$ .  $N$  – середина отрезка  $AH$ ,  $M$  – середина ребра  $AP$ .

а) Докажите, что угол между прямыми  $PH$  и  $BM$  равен углу  $BMN$ .

б) Длины всех ребер данной пирамиды равны между собой. Найдите угол между прямыми  $PH$  и  $BM$ .

Ответ:

**1.25**

В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  проведена высота  $SH$ . Точка  $E$  делит отрезок  $CH$  на две равные части, а точка  $F$  делит ребро  $SC$  на две равные части.

а) Докажите, что угол между прямыми  $SH$  и  $BF$  равен углу  $BFE$ .

б) Длины всех ребер данной пирамиды равны между собой. Найдите угол  $FBE$ .

Ответ:

**1.26**

В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  проведена высота  $SH$ . Точка  $E$  делит отрезок  $CH$  на две равные части, а точка  $F$  делит ребро  $SC$  на две равные части.

а) Докажите, что угол между прямыми  $SH$  и  $BF$  равен углу  $BFE$ .

б) Найдите угол между прямыми  $SH$  и  $BF$ , если известно, что боковое ребро пирамиды в два раза больше стороны основания.

Ответ:

**1.27**

Основание пирамиды  $DABC$  – прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом при вершине  $C$ . Высота пирамиды проходит через точку  $B$ . Точки  $M$  и  $N$  – середины ребер  $AD$  и  $BC$  соответственно.

а) Докажите, что  $MN$  является биссектрисой угла  $BMC$ .

б) Найдите угол между прямыми  $BD$  и  $MN$ , если  $BD = 6\sqrt{2}$  и  $AC = 16$ .

Ответ:

**1.28**

Основание пирамиды  $SABC$  – прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом при вершине  $C$ . Ребро  $SB$  является высотой пирамиды, опущенной на плоскость  $ABC$ . Точки  $M$ ,  $K$  и  $N$  – середины ребер  $SA$ ,  $AB$  и  $BC$  соответственно.

а) Докажите, что угол между  $MN$  и  $AC$  равен углу  $MNK$ .

б) Найдите угол между прямыми  $MN$  и  $AC$ , если  $SB = 5$  и  $AC = 17$ .

Ответ:

**1.29**

В основании прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит равнобедренный прямоугольный треугольник  $ABC$  с гипотенузой  $AB$ , равной  $8\sqrt{2}$ . Высота призмы равна 6.

а) Докажите, что плоскость, содержащая прямую  $AC_1$  и параллельная прямой  $CB_1$  проходит через середину ребра  $A_1B_1$ .

б) Найдите угол между прямыми  $AC_1$  и  $CB_1$ .

Ответ:

**1.30**

В основании прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$  с катетами  $AC$  и  $BC$ , равными 5 и 35 соответственно. Высота призмы равна 12.

а) Докажите, что плоскость, содержащая прямую  $AC_1$  и параллельная прямой  $CB_1$  проходит через середину ребра  $A_1B_1$ .

б) Найдите угол между прямыми  $AC_1$  и  $CB_1$ .

Ответ:

**1.31**

Сторона основания правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  равна 8, а высота равна 6.

а) Докажите, что плоскость, содержащая прямую  $AB_1$  и параллельная прямой  $CA_1$  проходит через середину ребра  $BC$ .

б) Найдите угол между прямыми  $CA_1$  и  $AB_1$ .

Ответ:

**1.32**

В основании прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $BC = 6$  и боковой стороной, равной 5. Высота этой призмы равна 12.

а) Докажите, что плоскость, содержащая прямую  $AB_1$  и параллельная прямой  $CA_1$  проходит через середину ребра  $BC$ .

б) Найдите угол между прямыми  $CA_1$  и  $AB_1$ .

Ответ:

**1.33**

В основании прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $BC = 8$  и боковой стороной, равной 5. Высота этой призмы равна 12.

а) Докажите, что плоскость, содержащая прямую  $A_1B$  и параллельная прямой  $AC_1$  проходит через середину ребра  $B_1C_1$ .

б) Найдите угол между прямыми  $A_1B$  и  $AC_1$ .

Ответ:

**1.34**

В основании прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит равнобедренная трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Известно, что  $AD:BC = 2:1$  и  $AB = BC$ .

а) Докажите, что прямые  $DB_1$  и  $A_1B_1$  перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми  $CD_1$  и  $DB_1$ , если боковая грань  $AA_1D_1D$  – квадрат.

Ответ:

**1.35**

В основании прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит равнобедренная трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Известно, что  $AD$  в два раза больше  $BC$  и  $AB = BC = CD$ .

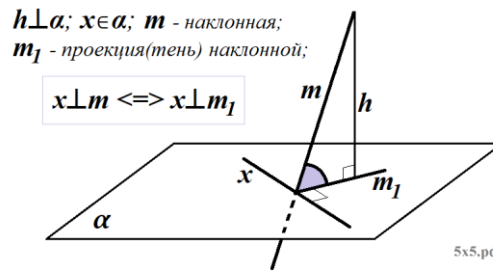
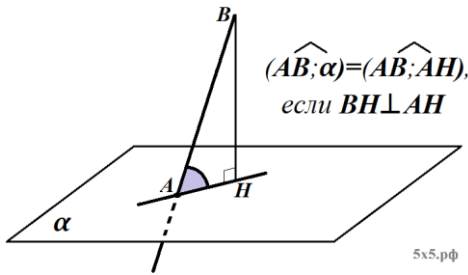
а) Докажите, что прямые  $CD$  и  $A_1C$  перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми  $CD_1$  и  $A_1C$ , если  $AA_1 = AD$ .

Ответ:

**Прямая и плоскость**

**ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ?**



**1.36**

Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

- Докажите, что все грани тетраэдра  $ACB_1 D_1$  – равные треугольники (т.е. тетраэдр является равногранным).
- В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите угол между плоскостью  $A_1 BC$  и прямой  $BC_1$ , если  $AA_1 = 8, AB = 6, BC = 15$ .

Ответ:

**1.37**

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известны  $AB = 2, AD = AA_1 = 1$ .

- Пусть  $B_1 E$  – высота треугольника  $BB_1 C_1$ . Докажите, что  $AE$  – проекция  $AB_1$  на плоскость  $ABC_1$ .
- Найдите угол между прямой  $AB_1$  и плоскостью  $ABC_1$ .

Ответ:

**1.38**

а) Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Докажите, что все грани тетраэдра  $ACB_1 D_1$  – равные треугольники (т.е. тетраэдр является равногранным).

- В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , у которого  $AA_1 = 4, A_1 D_1 = 6, C_1 D_1 = 6$ , найдите тангенс угла между плоскостью  $ADD_1$  и прямой  $EF$ , проходящей через середины ребер  $AB$  и  $B_1 C_1$ .

Ответ:

**1.39**

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известны  $AB = 3, AD = AA_1 = 1$ .

- Пусть  $A_1 E$  – высота треугольника  $AA_1 D_1$ . Докажите, что  $BE$  – проекция  $A_1 B$  на плоскость  $ABC_1$ .
- Найдите синус угла между прямой  $A_1 B$  и плоскостью  $ABC_1$ .

Ответ:

**1.40**

В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  известны рёбра:  $AB = 4\sqrt{2}, AA_1 = 4$ . Точка  $M$  – середина ребра  $BC$ .

- Докажите, что прямые  $B_1 C$  и  $C_1 M$  перпендикулярны.
- Найдите угол между прямой  $C_1 M$  и плоскостью грани  $ABB_1 A_1$ .

Ответ:

**1.41**

Сторона основания правильной треугольной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  равна 2, а высота этой призмы равна  $\sqrt{2}$ . Точка  $N$  – середина ребра  $AB$ .

- Докажите, что прямые  $A_1 B$  и  $B_1 N$  перпендикулярны.
- Найдите угол между прямой  $B_1 N$  и плоскостью грани  $ACC_1 A_1$ .

Ответ:

**1.42**

В основании прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $AC$ . Точка  $K$  – середина  $A_1B_1$ , а точка  $M$  делит ребро  $AC$  в отношении  $AM:MC = 1:3$ .

- Докажите, что  $KM$  перпендикулярно  $AC$ .
- Найдите угол между прямой  $KM$  и плоскостью  $ABC$ , если  $AB = 12$ ,  $AC = 16$  и  $AA_1 = 6$ .

Ответ:

**1.43**

В основании прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $AC$ . Точка  $K$  – середина  $B_1C_1$ , а точка  $N$  делит ребро  $AC$  в отношении  $AN:NC = 3:1$ .

- Докажите, что  $KN$  перпендикулярно  $AC$ .
- Найдите угол между прямой  $KN$  и плоскостью  $ABC$ , если  $AB = 13$ ,  $AC = 10$  и  $AA_1 = 6$ .

Ответ:

**1.44**

В основании четырёхугольной пирамиды  $TABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 4$  и  $BC = 3$ . Длины боковых рёбер пирамиды  $TA = \sqrt{11}$ ,  $TB = 3\sqrt{3}$ ,  $TD = 2\sqrt{5}$ .

- Докажите, что  $TA$  – высота пирамиды.
- Найдите угол между прямой  $TC$  и плоскостью  $ATB$ .

Ответ:

**1.45**

В основании четырёхугольной пирамиды  $TABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 6$  и  $BC = 3$ . Длины боковых рёбер пирамиды  $TA = 2\sqrt{3}$ ,  $TD = \sqrt{3}$ ,  $TC = \sqrt{39}$ .

- Докажите, что  $TD$  – высота пирамиды.
- Найдите угол между прямой  $TB$  и плоскостью  $ATD$ .

Ответ:

**1.46**

В правильной треугольной пирамиде  $TABC$  с основанием  $ABC$  известны ребра  $AB = 7\sqrt{3}$ ,  $TC = 25$ .  $M$  – середина ребра  $TA$ .

- Докажите, что проекции точек  $T$  и  $M$  на плоскость основания делят высоту  $AN$  треугольника  $ABC$  на три равные части.
- Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой  $MN$ .

Ответ:

**1.47**

В правильной треугольной пирамиде  $TABC$  сторона основания  $ABC$  равна 12, а боковое ребро  $8\sqrt{7}$ . Точка  $M$  делит ребро  $TA$  так, что  $TM = 3AM$ .

- Докажите, что проекция точки  $M$  на плоскость основания делит биссектрису  $AN$  треугольника  $ABC$  в отношении 1:5, считая от вершины  $A$ .
- Найдите угол между плоскостью основания и прямой  $MN$ .

Ответ:

**1.48**

Дана пирамида  $TABC$ , в которой  $TC = TB = \sqrt{17}$ ,  $AB = AC = \sqrt{29}$ ,  $TA = BC = 2\sqrt{5}$ .

- Докажите, что ребро  $TA$  перпендикулярно ребру  $BC$ .
- Найдите угол между прямой  $TA$  и плоскостью  $TBC$ .

Ответ:

**1.49**

Дана пирамида  $TABC$ , в которой  $TA = TB = \sqrt{27}$ ,  $AC = CB = \sqrt{11}$ ,  $AB = 2\sqrt{2}$ ,  $TC = 4$ .

- Докажите, что ребро  $TC$  перпендикулярно ребру  $AB$ .
- Найдите угол между прямой  $TC$  и плоскостью основания.

Ответ:

**1.50**

В правильном тетраэдре  $ABCD$  точка  $K$  – центр грани  $ABD$ , точка  $M$  – центр грани  $ACD$ .

- Докажите, что прямые  $BC$  и  $KM$  параллельны.
- Найдите угол между прямой  $KM$  и плоскостью  $ABD$ .

Ответ:

**1.51**

В правильном тетраэдре  $ABCD$  точка  $K$  – центр грани  $ABD$ , точка  $M$  – центр грани  $ACD$ .

- Докажите, что  $BC:KM$  относятся как 3:1.
- Найдите угол между прямой  $CM$  и плоскостью  $ABD$ .

Ответ:

**1.52**

а) Докажите, что в правильной треугольной пирамиде  $TABC$ , где  $T$  – вершина пирамиды, прямая  $TC$  перпендикулярна прямой  $AB$ .

б) Пусть высота  $TO$  составляет  $5/7$  от высоты  $TM$  боковой грани  $TAB$ . Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

Ответ:

**1.53**

Дана правильная треугольная пирамида  $TABC$ , где  $T$  – вершина пирамиды.

- Докажите, что прямая  $TA$  перпендикулярна прямой  $BC$ .
- Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и медианой боковой грани, проведённой из вершины  $T$ , если боковое ребро пирамиды в два раза больше высоты пирамиды.

Ответ:

**1.54**

В правильном тетраэдре  $ABCD$  точка  $M$  делит ребро  $AD$  в отношении 1:3, считая от вершины  $A$ .

- Докажите, что проекция точки  $M$  на плоскость  $BCD$  делит биссектрису  $DN$  на две равные части.
- Найдите угол между прямой  $BM$  и плоскостью  $BCD$ .

Ответ:

**1.55**

В правильном тетраэдре  $ABCD$   $M$  – середина ребра  $AD$ .

а) Докажите, что проекция точки  $M$  на плоскость  $BCD$  делит высоту  $DN$  треугольника  $BCD$  в отношении 1:2, считая от вершины  $D$ .

б) Найдите угол между медианой  $BM$  грани  $ABD$  и плоскостью  $BCD$ .

Ответ:

**1.56**

Основание  $ABCD$  призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  – трапеция с основаниями  $AB = 2CD$ .

- Докажите, что плоскость  $BA_1D_1$  проходит через середину бокового ребра  $CC_1$ .
- Найдите угол между боковым ребром  $AA_1$  и этой плоскостью, если призма прямая, трапеция  $ABCD$  прямоугольная с прямым углом при вершине  $B$ ,  $BC = CD$  и  $AA_1$  в  $\sqrt{6}$  больше, чем  $CD$ .

Ответ:

**1.57**

Основание  $ABCD$  призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  – трапеция с основаниями  $AB = 2CD$ .

- Докажите, что плоскость  $BA_1D_1$  проходит через середину бокового ребра  $CC_1$ .
- Найдите угол между боковым ребром  $AA_1$  и этой плоскостью, если призма прямая, трапеция  $ABCD$  прямоугольная с прямым углом при вершине  $B$ ,  $BC = CD$  и  $AA_1$  в  $\sqrt{2}$  больше, чем  $CD$ .

Ответ:



**1.58**

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  сторона основания равна 30. Точка  $M$  делит ребро  $B_1C_1$  в отношении 1:2, считая от вершины  $C_1$ . Точка  $P$  делит ребро  $A_1B_1$  на равные части. На ребре  $A_1C_1$  отмечена точка  $N$  так, что  $C_1N:A_1N = 1:2$ . Точка  $O$  – точка пересечения биссектрис нижнего основания  $ABC$ .

а) Докажите, что  $OP$  параллельна плоскости  $CMN$ .

б) Найдите угол между прямой  $OP$  и плоскостью основания, если высота призмы равна 5.

Ответ:

**1.59**

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  сторона основания  $AB = 6\sqrt{3}$ . На ребре  $BC$  отмечена точка  $M$  так, что  $BC:MC = 3:1$ , а на ребре  $AC$  отмечена точка  $N$  так, что  $AN:NC = 2:1$ . Точка  $K$  середина ребра  $AB$ .

а) Доказать, что  $OK$  параллельна плоскости  $MNC_1$ , где  $O$  – центр вписанной окружности треугольника  $A_1B_1C_1$ .

б) Найти угол между прямой  $OK$  и плоскостью основания, если площадь треугольника  $MNC_1$  равна  $6\sqrt{3}$ .

Ответ:

**1.60**

В основании пирамиды  $SABCD$  лежит ромб  $ABCD$ , сторона которого равна 8, а угол при вершине  $A$  равен  $60^\circ$ . Известно, что  $SA = 15$ ,  $SC = \sqrt{33}$  и, кроме того,  $SB = SD$ .

а) Докажите, что  $SC$  – высота пирамиды.

б) Найдите угол между плоскостью  $ASC$  и ребром  $SB$ .

Ответ:

**1.61**

В основании пирамиды  $TABCD$  лежит ромб  $ABCD$ , сторона которого равна 8, а угол при вершине  $A$  равен  $60^\circ$ . Известно, что  $TB = 15$ ,  $TD = 17$ , а  $TA = TC$ .

а) Докажите, что  $TB$  – высота пирамиды.

б) Найдите угол между плоскостью  $TBD$  и ребром  $TA$ .

Ответ:

**1.62**

В основании пирамиды  $TABCD$  лежит ромб  $ABCD$ , сторона которого равна 2, а угол при вершине  $A$  равен  $60^\circ$ . Известно, что  $TB = \sqrt{2}$ ,  $TD = \sqrt{6}$ , а  $TA = TC$ .

а) Докажите, что ребро  $TB$  перпендикулярно плоскости основания пирамиды.

б) Найдите угол между плоскостью  $TBD$  и ребром  $TC$ .

Ответ:

**1.63**

В основании прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит равнобедренный треугольник  $ABC$  с равными сторонами  $AB$  и  $BC$ . Точки  $K$  и  $M$  – середины ребер  $A_1B_1$  и  $AC$  соответственно.

а) Докажите, что  $KM = KB$ .

б) Найдите угол между прямой  $KM$  и плоскостью  $ABB_1$ , если  $AB = 8$ ,  $AC = 6$  и  $AA_1 = 3$ .

Ответ:

**1.64**

В основании прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит равнобедренный треугольник  $ABC$  с равными сторонами  $AB$  и  $BC$ . Точки  $K$  и  $M$  – середины ребер  $A_1B_1$  и  $AC$  соответственно.

а) Докажите, что  $KM = AK$ .

б) Найдите угол между прямой  $KM$  и плоскостью  $ABB_1$ , если  $AB = 10$ ,  $AC = 6$  и  $AA_1 = \sqrt{66}$ .

Ответ:

**1.65**

В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  все ребра равны 1.

- Докажите, что  $AC_1$  перпендикулярна прямой  $BE$ .
- Найдите угол между прямой  $AC_1$  и плоскостью  $ACD_1$ .

Ответ:

**1.66**

В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  все ребра равны 2.

- Докажите, что  $A_1 C$  перпендикулярна прямой  $BE$ .
- Найдите угол между прямой  $A_1 C$  и плоскостью  $AF_1 D_1 C$ .

Ответ:

**1.67**

Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ . Сторона её основания  $AB$  равна 5, а боковое ребро  $AA_1$  равно 10.

- Докажите, что  $A_1 D$  делит отрезок  $OO_1$  (где точки  $O$  и  $O_1$  являются центрами оснований) на две равные части.
- Найдите угол между прямой  $A_1 D$  и плоскостью основания.

Ответ:

**1.68**

Длины всех ребер правильной четырёхугольной пирамиды  $TABCD$  с вершиной  $T$  равны между собой. Точка  $M$  – середина бокового ребра  $TA$ .

- Докажите, что плоскость, проходящая через точки  $B$  и  $M$  и перпендикулярная плоскости  $BDT$ , делит высоту пирамиды пополам.
- Найдите угол между прямой  $BM$  и плоскостью  $BDT$ .

Ответ:

**1.69**

Длины всех ребер правильной четырёхугольной пирамиды  $TABCD$  с вершиной  $T$  равны между собой. Точка  $M$  – середина бокового ребра  $TA$ , а точка  $N$  – середина бокового ребра  $TC$ .

- Докажите, что плоскость, проходящая через точки  $B$ ,  $N$  и  $M$  делит высоту пирамиды пополам.
- Найдите угол между прямыми  $BM$  и  $BN$ .

Ответ:

**1.70**

Длины всех ребер правильной четырёхугольной пирамиды  $TABCD$  с вершиной  $T$  равны между собой. Точка  $M$  – середина бокового ребра  $TA$ , а точка  $N$  – середина бокового ребра  $TC$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$ , проходящая через точки  $B$ ,  $N$  и  $M$  делит ребро пирамиды  $TD$  в отношении 1:2, считая от вершины  $T$ .
- Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и прямой  $BD$ .

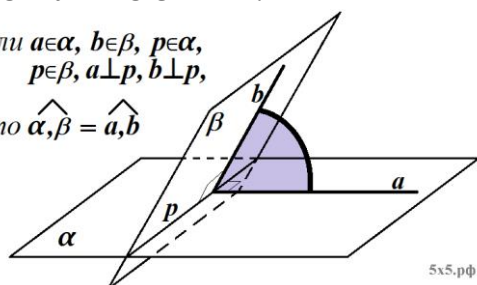
Ответ:

## Две плоскости

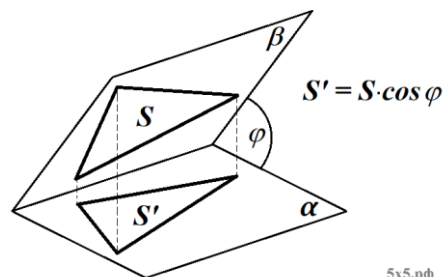
### ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ?

Если  $a \in \alpha$ ,  $b \in \beta$ ,  $p \in \alpha$ ,  
 $p \in \beta$ ,  $a \perp p$ ,  $b \perp p$ ,

то  $\widehat{\alpha, \beta} = \widehat{a, b}$



5x5.рф



5x5.рф

### 1.71

Основанием прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  является равнобедренный треугольник  $ABC$ ,  $AB = AC = 5$ ,  $BC = 8$ . Высота призмы равна 3. Точка  $M$  – середина ребра  $B_1C_1$ .

а) Докажите, что плоскость  $BA_1M$  перпендикулярна плоскости  $BCC_1$ .

б) Найдите угол между прямой  $A_1B$  и плоскостью  $BCC_1$ .

Ответ:

### 1.72

Основанием прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  является равнобедренный треугольник  $ABC$ ,  $AB = AC = 6$ ,  $BC = \sqrt{44}$ . Высота призмы равна 8. Точка  $M$  – середина ребра  $B_1C_1$ .

а) Докажите, что плоскость  $A_1MC$  перпендикулярна плоскости  $BB_1C_1C$ .

б) Найдите угол между прямой  $A_1C$  и плоскостью  $BB_1C_1C$ .

Ответ:

### 1.73

В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  все рёбра равны 1.

а) Докажите, что плоскости  $AA_1D_1$  и  $DB_1F_1$  перпендикулярны.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями  $ABC$  и  $DB_1F_1$ .

Ответ:

### 1.74

В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  все рёбра равны 2.

а) Докажите, что плоскости  $ADD_1$  и  $BFD_1$  перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью  $BFD_1$ .

Ответ:

### 1.75

На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1E:EA = 3:4$ . Точка  $T$  – середина ребра  $B_1C_1$ . Известно, что  $AB = 9$ ,  $AD = 6$ ,  $AA_1 = 14$ .

а) Докажите, что плоскость  $ETD_1$  делит ребро  $BB_1$  в отношении 3:11?

б) Найдите угол между плоскостью  $ETD_1$  и плоскостью  $AA_1B_1$ .

Ответ:

### 1.76

На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1E:EA = 3:4$ . Точка  $T$  – середина ребра  $B_1C_1$ . Известно, что  $AB = 9$ ,  $AD = 6$ ,  $AA_1 = 14$ .

а) Докажите, что плоскость  $ETD_1$  делит ребро  $BB_1$  в отношении 3:11?

б) Найдите угол между плоскостью  $ETD_1$  и плоскостью  $AA_1B_1$ .

Ответ:

**1.77**

Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ , все рёбра которой равны 4. Через точки  $A$ ,  $C_1$  и середину  $T$  ребра  $A_1B_1$  проведена плоскость.

- Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
- Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью  $ABC$ .

Ответ:

**1.78**

Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ , все рёбра которой равны 4. Через точки  $A$ ,  $C_1$  и середину  $T$  ребра  $A_1B_1$  проведена плоскость.

- Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
- Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

Ответ:

**1.79**

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  сторона основания равна  $7\sqrt{3}$ , а боковое ребро 8.

- Докажите, что плоскость  $B_1CA_1$  перпендикулярна плоскости, проходящей через ребро  $AA_1$  и середину ребра  $B_1C_1$ .
- Найдите тангенс угла между плоскостями  $B_1CA_1$  и  $BB_1C_1$ .

Ответ:

**1.80**

Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ , у которой сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 3. Через точки  $A$ ,  $C_1$  и середину  $T$  ребра  $A_1B_1$  проведена плоскость.

- Докажите, что  $AC_1T$  является прямоугольным треугольником.
- Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью  $ABC$ .

Ответ:

**1.81**

Дана четырёхугольная пирамида  $TABCD$  с прямоугольником  $ABCD$  в основании. Сторона  $AB$  равна 4, а  $BC$  равна  $4\sqrt{2}$ . Вершина пирамиды  $T$  проектируется в точку пересечения диагоналей прямоугольника. Из вершин  $A$  и  $C$  на ребро  $TB$  опущены перпендикуляры  $AP$  и  $CQ$ .

- Докажите, что точка  $P$  является серединой отрезка  $BQ$ .
- Найдите угол между плоскостями  $TBA$  и  $TBC$ , если ребро  $TD$  равно 8.

Ответ:

**1.82**

Основанием пирамиды  $TABCD$  является прямоугольник  $ABCD$ , в котором  $BC$  в два раза больше  $AB$ . Диагонали прямоугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Отрезок  $TO$  является высотой пирамиды  $TABCD$ . Из вершин  $A$  и  $C$  опущены перпендикуляры  $AP$  и  $CQ$  на ребро  $TB$ .

- Докажите, что  $BP:PQ = 1:3$ .
- Найдите двугранный угол пирамиды при ребре  $TB$ , если  $TB = BC$ .

Ответ:

**1.83**

Дана прямая призма  $ABCA_1B_1C_1$ .

- Докажите, что линия пересечения плоскостей  $ABC_1$  и  $A_1B_1C$  параллельна основаниям призмы.
- Найдите угол между плоскостями  $ABC_1$  и  $A_1B_1C$ , если известно, что  $AC=1$ ,  $BC=2$ ,  $AB=\sqrt{5}$ ,  $CC_1=3$ .

Ответ:

**1.84**

Дана прямая призма  $ABCA_1B_1C_1$ .

- Докажите, что линия пересечения плоскостей  $ABC_1$  и  $A_1B_1C$  параллельна основаниям призмы.
- Найдите угол между плоскостями  $ABC_1$  и  $A_1B_1C$ , если  $AB=3\sqrt{2}$ ,  $BC=\sqrt{10}$ ,  $AC=2$ ,  $AA_1=\sqrt{2}$ .

Ответ:

**1.85**

В правильной треугольной пирамиде  $TABC$  с основанием  $ABC$  боковое ребро равно 7, а сторона основания равна 6. На продолжении ребра  $TA$  за точку  $A$  отмечена точка  $P$ , а на продолжении ребра  $TB$  за точку  $B$  – точка  $Q$ , причём  $AP = BQ = TA$ .

- Докажите, что прямые  $PQ$  и  $TC$  перпендикулярны друг другу.
- Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $CPQ$ .

Ответ:

**1.86**

В правильной треугольной пирамиде  $TABC$  с основанием  $ABC$  боковое ребро равно 3, а сторона основания равна 4. На продолжении ребра  $TB$  за точку  $B$  отмечена точка  $M$ , а на продолжении ребра  $TC$  за точку  $C$  – точка  $N$ , причём  $BM = CN = 2TB$ .

- Докажите, что прямые  $MN$  и  $TA$  перпендикулярны друг другу.
- Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $AMN$ .

Ответ:

**1.87**

Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точка  $K$  – середина ребра  $C_1 D_1$ .

- Докажите, что расстояние от вершины  $A_1$  до прямой  $BK$  равно ребру куба.
- Найдите угол между плоскостями  $KBA_1$  и  $BCC_1$ .

Ответ:

**1.88**

Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $D_1 B$  и параллельна и прямой  $AD$ .

- Докажите, что угол между  $\alpha$  и  $(ABC)$  равен углу между  $\alpha$  и  $(A_1 B_1 C_1)$ .
- Найдите расстояние от вершины  $A_1$  до прямой  $BD_1$ , если  $AB = \sqrt{1,5}$ .

Ответ:

**1.89**

В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точка  $E$  делит  $CD$  так, что  $DE:EC = 2:3$ , а плоскость  $\alpha$  проходит через точку  $E$  и содержит прямую  $A_1 D_1$ .

- Докажите, что сечение куба плоскостью  $\alpha$  делит отрезок  $AB_1$  в отношении 2:5.
- Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $BCC_1$ .

Ответ:

**1.90**

В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точка  $K$  делит  $A_1 B_1$  так, что  $A_1 K:KB_1 = 2:1$ , а плоскость  $\alpha$  проходит через точку  $K$  и содержит прямую  $AD$ .

- Докажите, что сечение куба плоскостью  $\alpha$  делит ребро  $C_1 D_1$  в отношении 2:1.
- Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $ABCD$ .

Ответ:

**1.91**

В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  стороны основания равны 5, боковые ребра равны 15, точка  $D$  – середина ребра  $CC_1$ .

- Пусть прямые  $BD$  и  $B_1 C_1$  пересекаются в точке  $E$ . Докажите, что угол  $EA_1 B_1$  – прямой.
- Найдите угол между плоскостями  $A_1 B_1 C_1$  и  $BDA_1$ .

Ответ:

**1.92**

В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  все ребра равны, точка  $M$  – середина ребра  $BB_1$ .

- Пусть прямые  $AM$  и  $A_1 B_1$  пересекаются в точке  $N$ . Докажите, что угол  $AC_1 N$  – прямой.
- Найдите угол между плоскостью  $AC_1 N$  и плоскостью основания.

Ответ:

**1.93**

Две боковые грани пирамиды, в основании которой лежит ромб, перпендикулярны к плоскости основания.

- Докажите, что две другие боковые грани образуют равные двугранные углы с плоскостью основания.
- Найдите объем пирамиды, если боковые грани, перпендикулярные к плоскости основания, образуют двугранный угол  $120^\circ$ , а боковая грань, составляющая с плоскостью основания угол  $30^\circ$ , имеет площадь 36.

Ответ:

**1.94**

В основании пирамиды  $TABCD$  лежит ромб  $ABCD$ . Грани  $TAB$  и  $TBC$  перпендикулярны к  $(ABCD)$ .

- Докажите, что двугранный угол между  $(TAD)$  и  $(ABCD)$  равен двугранному углу между  $(TCD)$  и  $(ABCD)$ .
- Найдите объем пирамиды, если угол  $ADC = 120^\circ$ , двугранный угол между  $(TCD)$  и  $(ABCD)$  равен  $45^\circ$ , и высота ромба  $ABCD$  равна  $\sqrt{3}$ .

Ответ:

**1.95**

Дана правильная треугольная пирамида  $TABC$ ,  $AB = 24$ , высота  $TH$ , проведенная к основанию, равна 14, точка  $K$  – середина  $AT$ , точка  $N$  – середина  $BC$ . Плоскость, проходящая через точку  $K$  и параллельная основанию пирамиды, пересекает ребра  $TB$  и  $TC$  в точках  $Q$  и  $P$  соответственно.

- Докажите, что  $PQ$  проходит через середину отрезка  $TN$ .
- Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью  $APQ$ .

Ответ:

**1.96**

В правильной треугольной пирамиде  $TABC$   $AB = 6$ , высота  $TH$ , проведенная к основанию, равна 5, точка  $K$  – середина  $AT$ , точка  $N$  – середина  $BC$ . Плоскость, проходящая через точку  $K$  и параллельная основанию пирамиды, пересекает ребра  $TB$  и  $TC$  в точках  $Q$  и  $P$  соответственно.

- Докажите, что  $PQ$  проходит через середину отрезка  $TN$ .
- Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью  $APQ$ .

Ответ:

**1.97**

Все рёбра правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  имеют длину 6. Точки  $M$  и  $N$  – середины рёбер  $AA_1$  и  $A_1C_1$  соответственно.

- Докажите, что прямые  $BM$  и  $MN$  перпендикулярны.
- Найдите угол между плоскостями  $BMN$  и  $ABB_1$ .

Ответ:

**1.98**

Все рёбра правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  равны. Точки  $M$  и  $N$  – середины  $AA_1$  и  $A_1C_1$ .

- Докажите, что прямые  $BM$  и  $MN$  перпендикулярны.
- Найдите угол между плоскостями  $BMN$  и  $ABB_1$ .

Ответ:

**1.99**

Все рёбра правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  равны. Точки  $M$  и  $N$  – середины  $AA_1$  и  $A_1C_1$ .

- Докажите, что треугольник  $BMN$  прямоугольный.
- Найдите угол между прямой  $BN$  и плоскостью  $ABB_1$ .

Ответ:

**1.100**

Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

- Докажите, что прямая  $BD_1$  перпендикулярна плоскости  $ACB_1$ .
- Найдите угол между плоскостями  $AD_1 C_1$  и  $A_1 D_1 C$ .

Ответ:

**1.101**

Ребро куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равно 100.

- Докажите, что прямая  $AC_1$  перпендикулярна плоскости  $A_1 BD$ .
- Найдите площадь сечения куба плоскостью  $A_1 BD$ .
- Найдите угол между плоскостями  $ADC_1$  и  $ABC_1$ .

Ответ:

**1.102**

В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  все рёбра равны 4. На его ребре  $BB_1$  отмечена точка  $K$  так, что  $KB = 3$ . Через точки  $K$  и  $C_1$  построена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BD_1$ .

- Докажите, что  $A_1 P : P B_1 = 2 : 1$ , где  $P$  – точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $A_1 B_1$ .
- Найдите угол наклона плоскости  $\alpha$  к плоскости грани  $BB_1 C_1 C$ .

Ответ:

**1.103**

В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  все рёбра равны 12. На его ребре  $A_1 B_1$  отмечена точка  $N$  так, что  $A_1 N = 8$ . Через точки  $N$  и  $C_1$  построена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BD_1$ .

- Докажите, что  $BK : K B_1 = 3 : 1$ , где  $K$  – точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $BB_1$ .
- Найдите угол наклона плоскости  $\alpha$  к плоскости грани  $A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Ответ:

**1.104**

В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  на ребре  $BB_1$  отмечена точка  $K$  так, что  $BK : K B_1 = 3 : 1$ . Через точки  $K$  и  $C_1$  построена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BD_1$ .

- Докажите, что  $A_1 P : P B_1 = 2 : 1$ , где  $P$  – точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $A_1 B_1$ .
- Найдите угол наклона плоскости  $\alpha$  к плоскости грани  $AA_1 B_1 B$ .

Ответ:

**1.105**

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известны рёбра  $AB = 35$ ,  $AD = 12$ ,  $CC_1 = 21$ .

- Докажите, что высоты треугольников  $ABD$  и  $A_1 B D$ , проведённые к стороне  $BD$ , имеют общее основание.
- Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $A_1 D B$ .

Ответ:

**1.106**

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известны рёбра  $AB = \sqrt{3}$ ,  $AD = 1$ ,  $AA_1 = 0,5$ .

- Докажите, что высоты треугольников  $ABD$  и  $A_1 B D$ , проведённые к стороне  $BD$ , имеют общее основание.
- Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $A_1 D B$ .

Ответ:

**1.107**

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известны рёбра  $AB = 4$ ,  $AD = 3$ ,  $CC_1 = 2,4$ .

- Докажите, что высоты треугольников  $CBD$  и  $C_1 B D$ , проведённые из вершин  $C$  и  $C_1$  соответственно, имеют общее основание.
- Найдите угол между плоскостями  $(ABCD)$  и  $(C_1 B D)$ .

Ответ:



**1.108**

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  сторона основания равно  $8\sqrt{3}$ , а боковое ребро 5.

- Найдите длину отрезка  $A_1K$ , где  $K$  – середина ребра  $BC$ .
- Найдите тангенс угла между плоскостями  $B_1CA_1$  и  $BB_1C_1$ .

Ответ:

**1.109**

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  сторона основания  $AB = 2$ , а боковое ребро  $AA_1 = 3$ .

- Найдите длину отрезка  $A_1K$ , где  $K$  – середина ребра  $BC$ .
- Найдите угол между плоскостями  $B_1CA_1$  и  $ABC$ .

Ответ:

**1.110**

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  стороны основания равны 4, боковые рёбра равны 7, точка  $D$  – середина ребра  $BB_1$ .

- Пусть прямые  $C_1D$  и  $BC$  пересекаются в точке  $E$ . Докажите, что угол  $EAC$  – прямой.
- Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $ADC_1$ .

Ответ:

**1.111**

В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точка  $F$  середина ребра  $AB$ , а точка  $E$  делит ребро  $DD_1$  в отношении  $DE:ED_1 = 6:1$ . Через точки  $F$  и  $E$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $AC$  и пересекающая диагональ  $B_1D$  в точке  $O$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит диагональ  $DB_1$  в отношении  $DO:OB_1 = 2:3$ .
- Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $(ABC)$ , если дополнительно известно, что  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – правильная четырехугольная призма, сторона основания которой равна 4, а высота равна 7.

Ответ:

**1.112**

В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точка  $F$  середина ребра  $AB$ , а точка  $E$  делит ребро  $DD_1$  в отношении  $DE:ED_1 = 3:8$ . Через точки  $F$  и  $E$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $AC$  и пересекающая диагональ  $B_1D$  в точке  $O$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит диагональ  $DB_1$  в отношении  $DO:OB_1 = 1:4$ .
- Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $(A_1B_1C_1)$ , если дополнительно известно, что  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – правильная четырехугольная призма, сторона основания которой равна  $\sqrt{2}$ , а высота равна  $610,5$ .

Ответ:

**1.113**

В треугольной пирамиде  $TABC$  точка  $E$  – середина ребра  $TA$ , точка  $F$  – середина ребра  $TB$ , точка  $M$  – середина  $TC$ , а  $O$  – точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ .

- Докажите, что плоскость  $CEF$  делит отрезок  $TO$  в отношении  $3:2$ , считая от вершины  $T$ .
- Найдите косинус угла между плоскостями  $CEF$  и  $EFM$ , если пирамида  $TABC$  правильная, площадь треугольника  $ABC$  равна  $27\sqrt{3}$ , а  $AE = 5$ .

Ответ:

**1.114**

В треугольной пирамиде  $TABC$  точка  $E$  – середина ребра  $TA$ , точка  $F$  – середина ребра  $TB$ , точка  $M$  – середина  $TC$ , а  $O$  – точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ .

- Докажите, что плоскость  $CEF$  делит отрезок  $TO$  в отношении  $3:2$ , считая от вершины  $T$ .
- Найдите угол между плоскостями  $CEF$  и  $EFM$ , если пирамида  $TABC$  правильная, сторона основания равна 6000, а высота пирамиды равна 5000.

Ответ: